

SOLUCIÓN

Respuestas Verdadero o Falso: rellenar con V o F					
VF1	VF2	VF3	VF4	VF5	VF6
V	V	V	V	V	F

Correcta: 6 puntos. Incorrecta: -3 puntos.

Sin responder: 0 punto.

Respuestas Múltiple Opción: rellenar con A , B , C o D			
MO1	MO2	MO3	MO4
A	C	D	A

Correcta: 12 puntos. Incorrecta: -4 puntos.

Sin responder: 0 punto.

Verdadero o Falso

1. Hay exactamente 720 funciones inyectivas de $\{1, 2, 3\}$ en $\{1, 2, \dots, 10\}$.

Solución:

Para determinar todas las funciones inyectivas de $\{1, 2, 3\}$ en $\{1, 2, \dots, 10\}$, basta elegir tres elementos distintos del conjunto $\{1, 2, \dots, 10\}$, donde importa el orden de elección, pues el primero elegido será la imagen de 1, el segundo elegido será la imagen de 2, y el tercero elegido será la imagen de 3. Con ese proceso determinamos todas las funciones inyectivas. En total $A_3^{10} = 720$ funciones inyectivas.

2. Hay exactamente 70 relaciones de orden total en $\{1, 2, \dots, 8\}$ tales que $1 < 2 < 3 < 4$ y $8 < 7 < 6 < 5$.

Solución:

Tenemos que $1 < 2 < 3 < 4$ y $8 < 7 < 6 < 5$, y queremos saber el orden entre los primeros cuatro elementos y los últimos cuatro.

Esto es equivalente al problema: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 4$, con $0 \leq x_i$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$, siendo x_1 la cantidad de elementos del 1 al 4 que son menores que 8; x_2 la cantidad de elementos del 1 al 4 que son mayores que 8 pero menores que 7, etc. En total tenemos $CR_4^5 = C_4^8 = 70$.

3. Ningún retículo tiene más de 1 elemento minimal.

Solución:

Que no haya elemento minimal, es un caso posible. Si hay elemento minimal, no puede haber más de uno, pues dados dos elementos diferentes, $x \neq y$, existe z tal que zRx y zRy , por ser retículo. En cualquier caso se llega a una contradicción con el hecho que x e y eran minimales distintos. Por lo tanto si hay elemento minimal, en un retículo, es único.

4. Para cada par de enteros n y m tales que $m \geq n \geq 2$ se cumple que $\text{Sob}(m, n) = n \cdot \text{Sob}(m-1, n) + n \cdot \text{Sob}(m-1, n-1)$.

Solución:

$\text{Sob}(m, n)$ es la forma de colocar m elementos (diferentes) en n recipientes, también distinguibles, sin que ningún recipiente quede vacío. Así, luego de repartir $m-1$ de los m elementos pueden pasar tres cosas:

- A) haya dos o más recipientes vacíos, en ese caso no obtendremos solución al problema;
- B) quede solamente un recipiente vacío, y los $m-1$ elementos colocados están repartidos en $n-1$ recipientes. Luego estamos obligados a colocar el último elemento en el único recipiente que está vacío. Estos son $n \cdot \text{Sob}(m-1, n-1)$ casos.
- C) ninguno de los n recipientes esté vacío, con lo cual el último elemento puede ser colocado en cualquier recipiente. O sea tenemos $n \cdot \text{Sob}(m-1, n)$ casos.

Entonces, obtenemos que:

$$\text{Sob}(m, n) = n \cdot \text{Sob}(m-1, n-1) + n \cdot \text{Sob}(m-1, n), \text{ lo que se quería demostrar.}$$

5. El grafo G de la Figura 1 es plano.

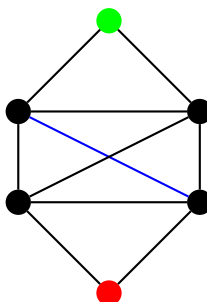


Figura 1: Grafo G .

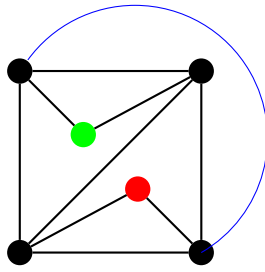


Figura 2: Grafo \hat{G} .

Solución:

Es plano. Es fácil observar que es isomorfo a \hat{G} .

6. El grafo H de la Figura 3 tiene un recorrido euleriano.

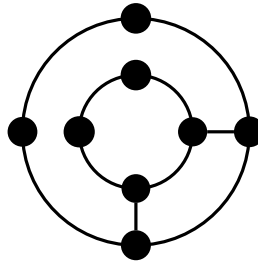


Figura 3: Grafo H .

Solución:

El grafo H no tiene recorrido euleriano pues tiene cuatro vértices de grado impar.

Múltiple Opción

1. Sea T un árbol. Sabemos que T tiene p vértices de grado 3 y que todos sus restantes vértices son hojas. Hallar la cantidad de hojas de T .

Solución:

Sabemos que: $\#V_T = p + h = \#E_T + 1$, siendo h el número de hojas de T .

Por otro lado se tiene: $3 \cdot p + h = \sum_{v \in V_T} \text{gr}(v) = 2 \cdot \#E_T$.

Si llamamos $\#E_T = e$, tenemos entonces que: $\begin{cases} 2e = 3 \cdot p + h; \\ e + 1 = p + h. \end{cases}$

Luego se tiene que: $p + h - 1 = e = \frac{3}{2} \cdot p + \frac{1}{2} \cdot h \rightarrow \frac{1}{2} \cdot h = \frac{1}{2} \cdot p + 1$, con lo cual $h = p + 2$.

2. Sea a_n la sucesión definida por $a_0 = 1$ y $a_{n+1} - 2a_n = 2^{n+1}$. Hallar a_{100} .

Solución:

Se comienza buscando la solución de la ecuación homogénea: $a_{n+1} = 2a_n$, y se obtiene la solución general de la homogénea: $a_n = \alpha \cdot 2^n$

Luego se busca una solución particular de la ecuación no homogénea. Se prueba con una de la forma $a_n = \beta \cdot n \cdot 2^n$. Insertando esta solución en la ecuación original se obtiene que $a_n = n \cdot 2^n$ es una solución particular.

Así podemos describir la solución general de la no homogénea: $a_n = \alpha \cdot 2^n + n \cdot 2^n$. Como $a_0 = 1$, se obtiene que $\alpha = 1$.

Así la solución final es: $a_n = 2^n + n \cdot 2^n = (n + 1) \cdot 2^n$, con lo cual se obtiene que $a_{100} = 101 \times 2^{100}$.

3. Hallar el coeficiente en x^2y^3 de $(2x + x^2 + y + y^2 - 3)^4$.

Solución:

Tomemos $a = 2x$, $b = x^2$, $c = y$, $d = y^2$, y $e = -3$. Tenemos entonces $(a + b + c + d + e)^4$, y podemos usar el Teorema del coeficiente del multinomio, cuyos términos tendrán la forma genérica siguiente: $a^\alpha \cdot b^\beta \cdot c^\gamma \cdot d^\delta \cdot e^\eta$, con $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \eta = 4$.

Necesitamos obtener x^2y^3 , con lo cual podemos tener los siguientes casos:

- $\alpha = 2$; $\beta = 0$; $\gamma = 1$; $\delta = 1$, $\eta = 0$:
en este caso el coeficiente que surge del Teorema es: $\frac{4!}{2!1!1!1!}$, que queda multiplicado por 2^2 .
- $\alpha = 0$; $\beta = 1$; $\gamma = 1$; $\delta = 1$, $\eta = 1$:
en este caso el coeficiente que surge del Teorema es: $\frac{4!}{1!1!1!1!}$, que queda multiplicado por -3 .
- $\alpha = 0$; $\beta = 1$; $\gamma = 3$; $\delta = 0$, $\eta = 0$:
en este caso el coeficiente que surge del Teorema es: $\frac{4!}{1!3!}$, que queda multiplicado por 1 .

En total tenemos: $48 - 72 + 4 = -20$.

4. Hallar la cantidad de soluciones enteras de la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5$ tales que para cada $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ se tiene que $-1 \leq x_i \leq 3$.

Solución:

La ecuación de arriba es equivalente a:

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 9, \quad 0 \leq y_i \leq 4,$$

si se hace el cambio de variable $y_i = x_i + 1$, para todo $1 \leq i \leq 4$.

Luego, usamos PIE, el Principio de Inclusión - Exlcusión.

Resolvemos primero:

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 9, \quad 0 \leq y_i, \quad 1 \leq i \leq 4,$$

que tiene C_3^{12} soluciones.

Resolvemos luego

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 9, \quad 5 \leq y_1,$$

que es equivalente a la ecuación:

$$z_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 4, \quad 0 \leq z_1, \quad 0 \leq y_i, \quad i = 2, 3, 4,$$

la cual tiene C_3^7 soluciones.

Este último análisis debemos repetirlo para los casos $i = 2, 3, 4$.

Observar que no puede suceder que dos variables y_i e y_j , con $i \neq j$, sean mayores o iguales a 5 al mismo tiempo, por lo que el número final de soluciones de la ecuación original es:

$$C_3^{12} - 4 \cdot C_3^7 = 80.$$

Ejercicio de Desarrollo (16 puntos)

Probar que para cada entero positivo n se cumple que $S(n, 2) = 2^{n-1} - 1$.

Solución:

Haremos la prueba por Inducción Completa, para el conjunto de los naturales positivos.

Base inductiva:

$n = 1$: $S(1, 2) = 0$ y por otro lado $2^{1-1} - 1 = 0$.

Con un valor base es suficiente, pero probaremos que la identidad también vale para:

$n = 2$: $S(2, 2) = 1$ y por otro lado $2^{2-1} - 1 = 1$.

Hipótesis inductiva, $n = h$: $S(h, 2) = 2^{h-1} - 1$.

Tesis inductiva, $n = h + 1$: $S(h + 1, 2) = 2^h - 1$.

Demostración:

$$S(h + 1, 2) = 2 \cdot S(h, 2) + S(h, 1).$$

La igualdad anterior se puede argumentar vía la fórmula de Stifel para números de Stirling de segunda especie; o se puede argumentar usando la fórmula de Stifel para los números de funciones sobreyectivas y luego usar la relación con los números de Stirling de segunda especie, o bien se puede demostrar de una tercera manera, como sigue:

$S(h + 1, 2)$ es la forma de colocar $h + 1$ elementos (diferentes) en 2 recipientes, indistinguibles, sin que ninguno de los dos quede vacío. Así, luego de colocar h de los elementos pueden pasar dos cosas:

1. todos estén en el mismo recipiente (con lo cual el último está obligado a quedar en el otro recipiente); estos son $S(h, 1)$ casos.
2. ninguno de los dos recipientes esté vacío, con lo cual el último elemento puede ser colocado en uno u otro recipiente. Pero, como los recipientes ya tienen elementos dentro, que son diferentes, cada recipiente es ahora distinguible. O sea tenemos $2 \cdot S(h, 2)$ casos.

Entonces, obtenemos que:

$$S(h + 1, 2) = 2 \cdot S(h, 2) + S(h, 1) = 2 \cdot (2^{h-1} - 1) + 1 = 2^h - 2 + 1 = 2^h - 1, \text{ lo que se quería demostrar.}$$